

Man erkennt an der Tabelle, daß für $a/R=0,3$ und $l/R=0,5$ sich eine noch höhere Abschaltwirkung ergibt. Aus dem für wachsende Stabanzahl immer steiler werdenden Maximum der Diagramme für einen Kranz hätte man vielleicht schließen können, daß ein Abweichen vom optimalen Abstand die Wirksamkeit stark beeinträchtigt. Man erkennt, daß dem nicht so ist, sondern sich im Gegenteil noch eine leichte Steigerung ergibt.

Nach Fertigstellung dieser Arbeit kam dem Verfasser eine Arbeit von MURRAY⁹ in die Hand, die

⁹ RAYMOND L. MURRAY, North Carolina State College, Raleigh, North Carolina. Published on behalf of the "Nuclear Engineering and Science of Chemical Engineers", 25 West 45 Street, New York 36.

dieselbe Fragestellung mit denselben Methoden nach der Zweigruppentheorie behandelt.

Indessen dürfte wegen der erheblich umfangreicheren, numerischen Ergebnisse die vorliegende Arbeit doch noch von Interesse sein.

Ein zahlenmäßiger Vergleich ist nicht möglich, da die Wirksamkeit unmittelbar als Reaktivitätsverlust angegeben ist und nicht in Einheiten, die dem Reaktortyp gegenüber invariant sind.

Ich danke Herrn Prof. Dr. L. BIERMANN für die Möglichkeit, die elektronische Rechenmaschine G 1 des Max-Planck-Institutes für Physik zu benutzen. Die Durchführung der Rechnungen wurde durch dieses Hilfsmittel erst ermöglicht.

Über die Abbildungsfehler von beliebig begrenzten homogenen magnetischen Sektorenfeldern

Von L. A. KÖNIG und H. HINTENBERGER

Aus dem Max-Planck-Institut für Chemie, Mainz

(Z. Naturforsch. 12 a, 377—385 [1957]; eingegangen am 11. Februar 1957)

Es werden die Bildfehler magnetischer Sektorenfelder für beliebigen Ein- und Austrittswinkel und beliebige Krümmung der Feldbegrenzung in Ein- und Austrittspunkt des Hauptstrahles angegeben. Die Ausdehnung des Gegenstandes (Schlitzbreite) wird berücksichtigt, der Einfluß des Streufeldes vernachlässigt. Die gewonnenen Ergebnisse werden mit den bereits früher bekannten Spezialfällen verglichen. Sie gestatten die unmittelbare Berechnung der Bildfehler von Massenspektrometern und Massenspektrographen, die aus hintereinander geschaltetem elektrischem Feld und homogenem magnetischem Sektorenfeld mit gekrümmter Feldbegrenzung bestehen.

1. Einleitung

In einer früheren Arbeit¹, in der auch ausführlichere Literaturhinweise zu finden sind, wurde für gerade Polschubbegrenzung der Ausdruck für den aus dem Magnetfeld austretenden Nebenstrahl s_1 bezogen auf ein Koordinatensystem, dessen x_m -Achse mit dem aus dem Feld ausgetretenen Hauptstrahl s_0 zusammenfällt, angegeben (siehe Abb. 1). Bedeutet α_m^* den Öffnungswinkel des vom Objekt P^* ausgehenden Strahlenbündels — das Objekt ist zunächst als ein zur Zeichenebene senkrechter Schlitz vernachlässigbar kleiner Weite gedacht — und β die relative Impulsabweichung der Teilchen des Nebenstrahls s_1 gegen die des Hauptstrahles, so lautet die Gleichung des austretenden Nebenstrahles:

$$y_m = r_m (M_1^* \alpha_m^* + M_2^* \beta + M_{11}^* \alpha_m^{*2} + M_{12}^* \alpha_m^* \beta + M_{22}^* \beta^2) + x_m (N_1^* \alpha_m^* + N_2^* \beta + N_{11}^* \alpha_m^{*2} + N_{12}^* \alpha_m^* \beta + N_{22}^* \beta^2). \quad (1)$$

¹ H. HINTENBERGER u. L. A. KÖNIG, Z. Naturforsch. 11 a, 1039 [1956].

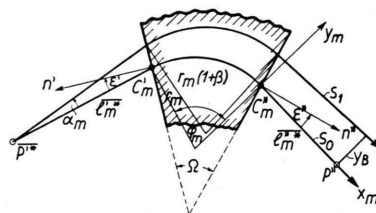


Abb. 1. Strahlengang im Fall geradlinig begrenzter Polschule s_0 =Hauptbahn, die von Teilchen des Impulses $p=p_0$ mit $\alpha_m^*=0$ durchlaufen wird. s_1 =Nachbarbahn von Teilchen mit $p=p_0(1+\beta)$ und $\alpha_m^* \neq 0$. x_m, y_m Koordinatensystem, auf das der aus dem Feld ausgetretene Nebenstrahl bezogen wird. Eintrittswinkel ϵ' und Austrittswinkel ϵ'' sind wie üblich dann positiv gezählt, wenn die Normalen zu den Feldbegrenzen in C'_m und C''_m auf der dem Ablenkungszentrum abgewandten Seite des Hauptstrahls liegen. In der Abbildung muß es α_m^* statt α_m heißen.

Hierin sind die Koeffizienten M^*, N^* Funktionen des Krümmungsradius r_m der Hauptbahn im Magnetfeld, der Objektentfernung l_m^* von C'_m , des Winkels φ_m , um den der Hauptstrahl im Feld abgelenkt wird, sowie von Ein- und Austrittswinkel ϵ' und ϵ'' .



des Hauptstrahles gegen die Normalen zu den Feldgrenzen in C'_m und C''_m . Im einzelnen ist

$$\begin{aligned}
 M_1^* &= \mu_{1a}^* + \mu_{1b}^* \frac{\overline{l_m^*}}{r_m}, & \mu_{1a}^* &= \sin \varphi_m, \\
 M_2^* &= \mu_{2a}^*, & \mu_{1b}^* &= \frac{\cos(\varphi_m - \varepsilon')}{\cos \varepsilon'}; \\
 M_{11}^* &= \mu_{11a}^* + \mu_{11b}^* \frac{\overline{l_m^*}}{r_m} + \mu_{11c}^* \left(\frac{\overline{l_m^*}}{r_m} \right)^2, & \mu_{2a}^* &= 1 - \cos \varphi_m; \\
 & & \mu_{11a}^* &= \frac{1}{2} [\cos \varphi_m (1 - \cos \varphi_m) + \operatorname{tg}^2 \varepsilon'' \sin^2 \varphi_m], \\
 & & \mu_{11b}^* &= \frac{\cos(\varphi_m - \varepsilon')}{\cos \varepsilon'} \left[\operatorname{tg} \varepsilon' + \operatorname{tg} \varepsilon'' \frac{\cos(\varphi_m - \varepsilon')}{\cos \varepsilon''} \right] \\
 & & & \quad + \cos \varphi_m \frac{\sin(\varphi_m - \varepsilon' - \varepsilon'')}{\cos \varepsilon' \cos \varepsilon''}, \\
 & & \mu_{11c}^* &= -\frac{1}{2} \frac{\sin(\varphi_m - \varepsilon' - \varepsilon'')}{\cos \varepsilon' \cos \varepsilon''} \left[\frac{\sin(\varphi_m - \varepsilon' - \varepsilon'')}{\cos \varepsilon' \cos \varepsilon''} \right. \\
 & & & \quad \left. + 2 \operatorname{tg} \varepsilon'' \frac{\cos(\varphi_m - \varepsilon')}{\cos \varepsilon'} \right]; \\
 M_{12}^* &= \mu_{12a}^* + \mu_{12b}^* \frac{\overline{l_m^*}}{r_m}, & \mu_{12a}^* &= \sin \varphi_m \frac{1 - \cos \varphi_m}{\cos^2 \varepsilon''}, \\
 & & \mu_{12b}^* &= \operatorname{tg} \varepsilon'' \left[\operatorname{tg} \varepsilon'' + \frac{\sin(\varphi_m - \varepsilon')}{\cos \varepsilon''} \right] \frac{\cos(\varphi_m - \varepsilon')}{\cos \varepsilon'} \\
 & & & \quad + \sin \varphi_m \frac{\sin(\varphi_m - \varepsilon' - \varepsilon'')}{\cos \varepsilon' \cos \varepsilon''}; \\
 M_{22}^* &= \mu_{22a}^*, & \mu_{22a}^* &= \operatorname{tg} \varepsilon'' \left[\operatorname{tg} \varepsilon'' + \frac{\sin(\varphi_m - \varepsilon')}{\cos \varepsilon''} \right] (1 - \cos \varphi_m) \\
 & & & \quad - \frac{1}{2} \left[\operatorname{tg} \varepsilon'' + \frac{\sin(\varphi_m - \varepsilon')}{\cos \varepsilon''} \right]^2; \\
 N_1^* &= \nu_{1a}^* + \nu_{1b}^* \frac{\overline{l_m^*}}{r_m}, & \nu_{1a}^* &= \frac{\cos(\varphi_m - \varepsilon'')}{\cos \varepsilon''}, \\
 & & \nu_{1b}^* &= -\frac{\sin(\varphi_m - \varepsilon' - \varepsilon'')}{\cos \varepsilon' \cos \varepsilon''}; \\
 N_2^* &= \nu_{2a}^*, & \nu_{2a}^* &= \operatorname{tg} \varepsilon'' + \frac{\sin(\varphi_m - \varepsilon'')}{\cos \varepsilon''}; \\
 N_{11}^* &= \nu_{11a}^* + \nu_{11b}^* \frac{\overline{l_m^*}}{r_m} + \nu_{11c}^* \left(\frac{\overline{l_m^*}}{r_m} \right)^2, & \nu_{11a}^* &= -\frac{1}{2} \left[\frac{\sin(\varphi_m - \varepsilon'')}{\cos \varepsilon''} + \operatorname{tg} \varepsilon'' \frac{\cos^2(\varphi_m - \varepsilon'')}{\cos^2 \varepsilon''} \right], \\
 & & \nu_{11b}^* &= -\frac{\sin(\varphi_m - \varepsilon' - \varepsilon'')}{\cos \varepsilon' \cos \varepsilon''} \left[\operatorname{tg} \varepsilon' - \operatorname{tg} \varepsilon'' \frac{\cos(\varphi_m - \varepsilon'')}{\cos \varepsilon''} \right], \\
 & & \nu_{11c}^* &= -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \varepsilon'' \frac{\sin^2(\varphi_m - \varepsilon' - \varepsilon'')}{\cos^2 \varepsilon' \cos^2 \varepsilon''}; \\
 N_{12}^* &= \nu_{12a}^* + \nu_{12b}^* \frac{\overline{l_m^*}}{r_m}, & \nu_{12a}^* &= -\frac{\cos(\varphi_m - \varepsilon'')}{\cos \varepsilon''} \left[\operatorname{tg} \varepsilon'' + \frac{\sin(\varphi_m - \varepsilon'')}{\cos \varepsilon''} \right] \operatorname{tg} \varepsilon'', \\
 & & \nu_{12b}^* &= \frac{\sin(\varphi_m - \varepsilon' - \varepsilon'')}{\cos \varepsilon' \cos \varepsilon''} \left\{ 1 + \operatorname{tg} \varepsilon'' \left[\operatorname{tg} \varepsilon'' + \frac{\sin(\varphi_m - \varepsilon'')}{\cos \varepsilon''} \right] \right\}; \\
 N_{22}^* &= \nu_{22a}^*, & \nu_{22a}^* &= -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \varepsilon'' \left[\operatorname{tg} \varepsilon'' + \frac{\sin(\varphi_m - \varepsilon'')}{\cos \varepsilon''} \right]^2 \\
 & & & \quad - \left[\operatorname{tg} \varepsilon'' + \frac{\sin(\varphi_m - \varepsilon'')}{\cos \varepsilon''} \right].
 \end{aligned} \tag{2}$$

Die Größen μ^* und ν^* wurden von uns für $30^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$ in Intervallen von 10° und für ε' bzw. $\varepsilon'' = 0, \pm 10^\circ, \pm 20^\circ, \pm 30^\circ, \pm 40^\circ$ tabelliert und stehen Interessenten zur Verfügung.

Zur Vorbereitung der nachfolgenden Rechnung ist es zweckmäßig, Gl. (1) umzuformen. Unter Benutzung der Abkürzung

$$s_i = \mu_i^* + \frac{x_m}{r_m} \nu_i^* \quad (i = 1a, 1b, 2a, 11a, 11b, 11c, 12a, 12b, 22a) \quad (4)$$

kann man Gl. (1) in der Form

$$\begin{aligned} \frac{y_m}{r_m} = & s_{1a} a_m^* + s_{1b} \left(a_m^* \frac{\overline{l_m^*}}{r_m} \right) + s_{2a} \beta + s_{11a} a_m^{*2} + s_{11b} a_m^* \left(a_m^* \frac{\overline{l_m^*}}{r_m} \right) \\ & + s_{11c} \left(a_m^* \frac{\overline{l_m^*}}{r_m} \right)^2 + s_{12a} a_m^* \beta + s_{12b} \beta \left(a_m^* \frac{\overline{l_m^*}}{r_m} \right) + s_{22a} \beta^2 \end{aligned} \quad (5)$$

darstellen.

Aus Gl. (1) bzw. Gl. (5) folgen für

$$x_m = \overline{l_m^*} \quad (\overline{l_m^*} = \text{Bildabstand } C_m'' P'')$$

die Bildfehler als Koeffizienten der Glieder mit a_m^{*2} , $a_m^* \beta$ und β^2 . Man findet z. B. aus Gl. (1)

$$y_B = r_m (B_1^* a_m^* + B_2^* \beta + B_{11}^* a_m^{*2} + B_{12}^* a_m^* \beta + B_{22}^* \beta^2)$$

$$\text{mit } B_i^* = M_i^* + \frac{\overline{l_m^*}}{r_m} N_i^* \quad (i = 1, 2, 11, 12, 22). \quad (6)$$

Mit der Abkürzung

$$S_i^* = s_i / x_m = \overline{l_m^*} = \mu_i^* + \frac{\overline{l_m^*}}{r_m} \nu_i^* \quad (7)$$

erhält man aus Gl. (5) für die B_i die gleichwertige Darstellung

$$\left. \begin{aligned} B_1^* &= S_{1a}^* + S_{1b}^* \frac{\overline{l_m^*}}{r_m}, \\ B_2^* &= S_{2a}^*, \\ B_{11}^* &= S_{11a}^* + S_{11b}^* \frac{\overline{l_m^*}}{r_m} + S_{11c}^* \left(\frac{\overline{l_m^*}}{r_m} \right)^2, \\ B_{12}^* &= S_{12a}^* + S_{12b}^* \frac{\overline{l_m^*}}{r_m}, \\ B_{22}^* &= S_{22a}^*. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Da im Bildabstand $x_m = \overline{l_m^*}$ Strahlen, die von einem Gegenstandspunkt in verschiedenen Richtungen ausgehen, in erster Näherung fokussiert werden, ist $B_1^* = 0$.

Die in der früheren Arbeit¹ durchgeführten Überlegungen lassen sich unter geringem Aufwand an Rechnung auf den Fall gekrümmter Feldbegrenzung unter Berücksichtigung der Objektausdehnung verallgemeinern. Dies wird im folgenden in zwei Schritten durchgeführt werden.

2. Berücksichtigung der Krümmung der Polschubbegrenzung

Die Betrachtung geht vom Bahnverlauf im homogenen Sektorfeld aus: Haupt- und Nebenstrahl seien dort vorgegeben. Der Bahnverlauf im Gegenstandsraum und im Bildraum, die beide als feldfrei vorausgesetzt sind (Vernachlässigung des Streufeldes), hängt dann von der Form der Feldbegrenzung ab. Ist R' der Krümmungsradius der Feldgrenze im Eintrittspunkt C_m' des Hauptstrahles (Abb. 2), so schneiden sich Haupt- und Nebenstrahl auf der Gegenstandsseite im Punkt P'^* unter dem Winkel α_m .

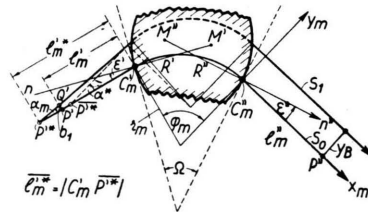


Abb. 2. Strahlengang im Fall beliebig begrenzter Polschuhe. Die Krümmungsradien R' und R'' in den Punkten C_m' und C_m'' sind für konvexe Krümmung der Polschuhe (wie in der Abb.) positiv, für konkave Krümmung negativ in die abgeleiteten Formeln einzusetzen. s_0 und s_1 wie in Abb. 1.

R' soll für konvexe Krümmung der Feldgrenzen (in Abb. 2 gezeichnet) positiv, für konkave negativ gezählt werden. Befindet sich also der Gegenstand, der noch als zur Zeichenebene senkrechter Schlitz von vernachlässigbarer Ausdehnung gedacht ist, im Punkt P'^* (Entfernung $|C_m' P'^*| = \overline{l_m^*}$), so haben Haupt- und Nebenstrahl im Ablenkfeld den vorgegebenen Verlauf. Wäre die Feldgrenze dagegen gerade, so müßte sich der Gegenstand im Punkt P'^* (Abstand $|C_m' P'^*| = \overline{l_m^*}$) befinden, damit Haupt- und Nebenstrahl in dem in beiden Fällen gemeinsamen Feldteil denselben Verlauf wie bei der mit

dem Krümmungsradius R' gekrümmten Feldgrenze haben. Der Öffnungswinkel wäre dann

$$\alpha^* = \alpha_m + \delta' \quad (9)$$

statt α_m . Um also die Bildfehler nach den Gln. (1) bzw. (5), die für geradlinig begrenzte Polschuhe gelten, berechnen zu können, hat man in diese und in die Gln. (2) und (3) die Werte von α^* und \overline{l}_m^* einzusetzen. Der Ausdruck für den austretenden Nebenstrahl, den man so erhält, gilt für den Krümmungsradius $R'' = \infty$ der Feldgrenze im Austrittspunkt C_m'' des Hauptstrahles. Für beliebige Krümmung der Feldgrenze in C_m'' hat man die Korrektur $x_m \delta''$ zu addieren, worin δ'' die Änderung des Neigungswinkels des Nebenstrahles gegen den Hauptstrahl infolge der Krümmung der Feldgrenze in C_m'' darstellt. Es gilt also

$$y_m = r_m \left[s_{1a} \alpha^* + s_{1b} \left(\alpha^* \frac{\overline{l}_m^*}{r_m} \right) + s_{2a} \beta + s_{11a} \alpha^{*2} + s_{11b} \alpha^* \left(\alpha^* \frac{\overline{l}_m^*}{r_m} \right) + s_{11c} \left(\alpha^* \frac{\overline{l}_m^*}{r_m} \right)^2 + s_{12a} \alpha^* \beta + s_{12b} \beta \left(\alpha^* \frac{\overline{l}_m^*}{r_m} \right) + s_{22a} \beta^2 \right] + \delta'' x_m. \quad (10)$$

R'' soll ebenso wie R' für konvexe Krümmung der Feldgrenzen positiv, für konkave negativ gezählt werden*.

Führt man die obigen Überlegungen im einzelnen durch, so findet man

$$\delta' = \frac{(a_m \overline{l}_m^*)^2}{2 R' r_m \cos^3 \varepsilon'}, \quad (11)$$

$$\delta'' = \frac{(\alpha'' \overline{l}_m^*)^2}{2 R'' r_m \cos^3 \varepsilon''}$$

$$\begin{aligned} \text{mit } (\alpha'' \overline{l}_m^*)^2 &= r_m^2 (M_1^* a_m + M_2^* \beta)^2 \\ &= r_m^2 \left[\mu_{1a}^* a_m + \mu_{1b}^* \left(a_m \frac{\overline{l}_m^*}{r_m} \right) + \mu_{2a}^* \beta \right]^2. \end{aligned} \quad (12)$$

(Zur Ableitung der Gln. (11) und (12) siehe Abb. 3. \overline{l}_m^* ist der Wert von x_m , für den $y_m = 0$ wird. α'' ist die Neigung des Nebenstrahles gegen den Hauptstrahl im Bildraum.)

$$\overline{l}_m^* = \overline{l}_m^* \left(1 - a_m \frac{\overline{l}_m^{*2}}{2 R' r_m \cos^3 \varepsilon'} \right). \quad (13)$$

* In Abb. 2 ist der Fall konvexer Krümmung der Feldgrenzen gezeichnet. Unter Beachtung der Vorzeichenfestsetzung für R' und R'' gelten die Überlegungen auch für konkave Krümmung.

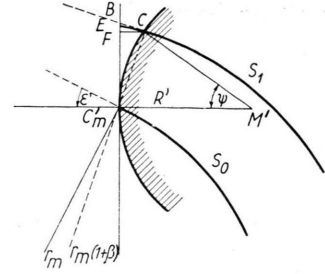


Abb. 3. Vergrößerter Ausschnitt aus Abb. 2 zur Ableitung der Gln. (11) und (12). Aus Abb. 3 liest man ab: Ist ψ ein kleiner Winkel, so gilt bei Berücksichtigung der Glieder zweiter Ordnung

$$|FC| = \frac{R'}{2} \psi^2, \quad \psi = \frac{|C_m' F|}{R'}.$$

$|FC| = |BC| \cos \varepsilon'$, $|BC| = \delta' r_m$. Zusammenfassen dieser

Gleichungen ergibt $\delta' = \frac{|C_m' F|^2}{2 R' r_m \cos \varepsilon'}$. Nach Abb. 2 ist

$\overline{l}_m^* \alpha_m = \frac{|C_m' F|}{\cos \varepsilon'}$ bis auf Glieder höherer Ordnung, woraus

die Behauptung folgt. Analog verläuft die Berechnung von δ'' .

Damit lautet die Gleichung des Nebenstrahls im Koordinatensystem x_m, y_m der Abb. 2:

$$\begin{aligned} \frac{y_m}{r_m} &= s_{1a} \alpha_m + s_{1b} \left(\alpha_m \frac{\overline{l}_m^*}{r_m} \right) + s_{2a} \beta + s_{11a} \alpha_m^2 \\ &+ s_{11b} \alpha_m \left(\alpha_m \frac{\overline{l}_m^*}{r_m} \right) + s_{11c} \left(\alpha_m \frac{\overline{l}_m^*}{r_m} \right)^2 + s_{12a} \alpha_m \beta \\ &+ s_{12b} \beta \left(\alpha_m \frac{\overline{l}_m^*}{r_m} \right) + s_{22a} \beta^2 + s_{1a} \frac{(a_m \overline{l}_m^*)^2}{2 R' r_m \cos^3 \varepsilon'} \\ &+ \frac{x_m}{2 R'' \cos^3 \varepsilon''} \left[\mu_{1a}^* a_m + \mu_{1b}^* \left(a_m \frac{\overline{l}_m^*}{r_m} \right) + \mu_{2a}^* \beta \right]^2. \end{aligned} \quad (14)$$

Nunmehr kann man leicht noch die endliche Ausdehnung des Gegenstandes berücksichtigen.

3. Berücksichtigung der endlichen Objektausdehnung

Geht durch den Punkt P' (Abb. 4) die Mittellinie des Schlitzes, der den abzubildenden Gegenstand darstellt und durch den Punkt Q' dessen Begrenzung, so hat man als Nebenstrahl eine von Q' ausgehende Bahn, die unter dem Winkel α_m gegen den Hauptstrahl geneigt ist, zu betrachten. Dieser Nebenstrahl hat nun genau denselben Verlauf, als wenn er vom Punkt P'^* unter dem Winkel α_m gegen den Hauptstrahl ausginge. Die Entfernung $|P' C_m'|$ sei

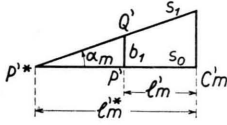


Abb. 4. Zur Berücksichtigung der endlichen Objektausdehnung. Ein von P'^* unter dem Winkel α_m gegen den Hauptstrahl s_0 ausgehender Nebenstrahl s_1 hat denselben Verlauf wie ein vom Rand Q' eines endlich ausgedehnten Schlitzes unter dem gleichen Winkel ausgehender Strahl.

mit l'_m , die Entfernung $|P'^* C'_m|$ mit l'_m bezeichnet. b_1 sei die halbe Schlitzbreite $P'Q'$. Zwischen l'_m , l_m^* , α_m und b_1 besteht dann die Beziehung

$$l_m^* \alpha_m = b_1 + l'_m \alpha_m, \quad (15)$$

wie man aus Abb. 4 entnimmt. Setzt man Gl. (15) in Gl. (14) ein, so erhält man nach einiger Zwischenrechnung die gesuchte Gleichung für den austretenden Strahl:

$$\left. \begin{aligned} \frac{y_m}{r_m} = & \left(s_{1a} + s_{1b} \frac{l'_m}{r_m} \right) \alpha_m + s_{1b} \frac{b_1}{r_m} + s_{2a} \beta + \left[s_{11a} + s_{11b} \frac{l'_m}{r_m} + s_{11c} \left(\frac{l'_m}{r_m} \right)^2 + s_{1a} \frac{r_m}{2 R' \cos^3 \epsilon'} \left(\frac{l'_m}{r_m} \right)^2 \right. \\ & + \left. \frac{x_m}{2 R'' \cos^3 \epsilon''} \left(\mu_{1a}^* + \mu_{1b}^* \frac{l'_m}{r_m} \right)^2 \right] \alpha_m^2 + \left[s_{12a} + s_{12b} \frac{l'_m}{r_m} + \frac{x_m}{R'' \cos^3 \epsilon''} \mu_{2a}^* \left(\mu_{1a}^* + \mu_{1b}^* \frac{l'_m}{r_m} \right) \right] \alpha_m \beta \\ & + \left[s_{11b} + 2 s_{11c} \frac{l'_m}{r_m} + s_{1a} \frac{r_m}{R' \cos^3 \epsilon'} \frac{l'_m}{r_m} + \frac{x_m}{R'' \cos^3 \epsilon''} \left(\mu_{1a}^* + \mu_{1b}^* \frac{l'_m}{r_m} \right) \mu_{1b}^* \right] \alpha_m \frac{b_1}{r_m} \\ & + \left(s_{22a} + \frac{x_m}{2 R'' \cos^3 \epsilon''} \mu_{2a}^{*2} \right) \beta^2 + \left(s_{12b} + \frac{x_m}{R'' \cos^3 \epsilon''} \mu_{1b}^* \mu_{2a}^* \right) \beta \frac{b_1}{r_m} \\ & + \left(s_{11c} + s_{1a} \frac{r_m}{2 R' \cos^3 \epsilon'} + \frac{x_m}{2 R'' \cos^3 \epsilon''} \mu_{1b}^{*2} \right) \left(\frac{b_1}{r_m} \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Aus dieser folgt durch Ordnen der Glieder

$$y_m = r_m \left[M_1 \alpha_m + M_2 \beta + M_3 \frac{b_1}{r_m} + M_{11} \alpha_m^2 + M_{12} \alpha_m \beta + M_{13} \alpha_m \frac{b_1}{r_m} + M_{22} \beta^2 + M_{23} \beta \frac{b_1}{r_m} + M_{33} \left(\frac{b_1}{r_m} \right)^2 \right] \\ + x_m \left[N_1 \alpha_m + N_2 \beta + N_3 \frac{b_1}{r_m} + N_{11} \alpha_m^2 + N_{12} \alpha_m \beta + N_{13} \alpha_m \frac{b_1}{r_m} + N_{22} \beta^2 + N_{23} \beta \frac{b_1}{r_m} + N_{33} \left(\frac{b_1}{r_m} \right)^2 \right] \quad (17)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \mu_{1a} + \mu_{1b} \frac{l'_m}{r_m}, & \mu_{1a} &= \mu_{1a}^*, & \mu_{1b} &= \mu_{1b}^*; \\ M_2 &= \mu_{2a}, & \mu_{2a} &= \mu_{2a}^*; \\ M_3 &= \mu_{3a}, & \mu_{3a} &= \mu_{1b}^* = \mu_{1b}; \\ M_{11} &= \mu_{11a} + \mu_{11b} \frac{l'_m}{r_m} + \mu_{11c} \left(\frac{l'_m}{r_m} \right)^2, & \mu_{11a} &= \mu_{11a}^*, & \mu_{11b} &= \mu_{11b}^*, \\ & & \mu_{11c} &= \mu_{11c}^* + \frac{r_m}{2 R' \cos^3 \epsilon'} \mu_{1a}^*; \\ M_{12} &= \mu_{12a} + \mu_{12b} \frac{l'_m}{r_m}, & \mu_{12a} &= \mu_{12a}^*, & \mu_{12b} &= \mu_{12b}^*; \\ M_{13} &= \mu_{13a} + \mu_{13b} \frac{l'_m}{r_m}, & \mu_{13a} &= \mu_{11b}^* = \mu_{11b}, \\ & & \mu_{13b} &= 2 \mu_{11c}^* + \frac{r_m}{R' \cos^3 \epsilon'} \mu_{1a}^* = 2 \mu_{11c}; \\ M_{22} &= \mu_{22a}, & \mu_{22a} &= \mu_{22a}^*; \\ M_{23} &= \mu_{23a}, & \mu_{23a} &= \mu_{12b}^* = \mu_{12b}; \\ M_{33} &= \mu_{33a}, & \mu_{33a} &= \mu_{11c}^* + \frac{r_m}{2 R' \cos^3 \epsilon'} \mu_{1a}^* = \mu_{11c}; \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
N_1 &= \nu_{1a} + \nu_{1b} \frac{l'_m}{r_m}, & \nu_{1a} &= \nu_{1a}^*, & \nu_{1b} &= \nu_{1b}^*; \\
N_2 &= \nu_{2a}, & \nu_{2a} &= \nu_{2a}^*; \\
N_3 &= \nu_{3a}, & \nu_{3a} &= \nu_{1b}^* = \nu_{1b}; \\
N_{11} &= \nu_{11a} + \nu_{11b} \frac{l'_m}{r_m} + \nu_{11c} \left(\frac{l'_m}{r_m} \right)^2, & \nu_{11a} &= \nu_{11a}^* + \frac{r_m}{2 R'' \cos^3 \varepsilon''} \mu_{1a}^{*2}, \\
& & \nu_{11b} &= \nu_{11b}^* + \frac{r_m}{R'' \cos^3 \varepsilon''} \mu_{1a}^* \mu_{1b}^*, \\
& & \nu_{11c} &= \nu_{11c}^* + \frac{r_m}{2 R'' \cos^3 \varepsilon''} \mu_{1b}^{*2} + \frac{r_m}{2 R' \cos^3 \varepsilon'} \nu_{1a}^*; \\
N_{12} &= \nu_{12a} + \nu_{12b} \frac{l'_m}{r_m}, & \nu_{12a} &= \nu_{12a}^* + \frac{r_m}{R'' \cos^3 \varepsilon''} \mu_{1a}^* \mu_{2a}^*, \\
& & \nu_{12b} &= \nu_{12b}^* + \frac{r_m}{R'' \cos^3 \varepsilon''} \mu_{1b}^* \mu_{2a}^*; \\
N_{13} &= \nu_{13a} + \nu_{13b} \frac{l'_m}{r_m}, & \nu_{13a} &= \nu_{11b}^* + \frac{r_m}{R'' \cos^3 \varepsilon''} \mu_{1a}^* \mu_{1b}^* = \nu_{11b}, \\
& & \nu_{13b} &= 2 \nu_{11c}^* + \frac{r_m}{R'' \cos^3 \varepsilon''} \mu_{1b}^{*2} + \frac{r_m}{R' \cos^3 \varepsilon'} \nu_{1a}^* = 2 \nu_{11c}; \\
N_{22} &= \nu_{22a}, & \nu_{22a} &= \nu_{22a}^* + \frac{r_m}{2 R'' \cos^3 \varepsilon''} \mu_{2a}^{*2}; \\
N_{23} &= \nu_{23a}, & \nu_{23a} &= \nu_{12b}^* + \frac{r_m}{R'' \cos^3 \varepsilon''} \mu_{1b}^* \mu_{2a}^* = \nu_{12b}; \\
N_{33} &= \nu_{33a}, & \nu_{33a} &= \nu_{11c}^* + \frac{r_m}{2 R'' \cos^3 \varepsilon''} \mu_{1b}^{*2} + \frac{r_m}{2 R' \cos^3 \varepsilon'} \nu_{1a}^* = \nu_{11c}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Aus Gl. (17) erhält man für $x_m = l'_m$ die Gl. (6) entsprechende Beziehung

$$\begin{aligned}
\frac{y_B}{r_m} &= B_1 \alpha_m + B_2 \beta + B_3 \frac{b_1}{r_m} + B_{11} \alpha_m^2 + B_{12} \alpha_m \beta + B_{13} \alpha_m \frac{b_1}{r_m} + B_{22} \beta^2 + B_{23} \beta \frac{b_1}{r_m} + B_{33} \left(\frac{b_1}{r_m} \right)^2 \\
&\text{mit } B_i = M_i + \frac{l'_m}{r_m} N_i.
\end{aligned} \tag{20}$$

Die Bildfehler sind durch die Glieder zweiter Ordnung gegeben. Das Endergebnis Gl. (20) enthält die bisher bekannte Theorie, wie anschließend diskutiert werden soll.

4. Diskussion

a) Linsengleichung

Es ist $B_1 = 0$, wie bereits in einer früheren Arbeit¹ gezeigt wurde. Ausgeschrieben stellt diese Beziehung die bekannte Linsengleichung für das magnetische Sektorfeld dar.

b) Dispersion

Der Ausdruck B_2 ist der Koeffizient der Impulsdispersion, wie ebenfalls früher gezeigt wurde¹.

c) Lateralvergrößerung

Der Ausdruck für B_3 lautet ausgeschrieben:

$$B_3 = \mu_{1b} + \nu_{1b} \frac{l'_m}{r_m}. \tag{21 a}$$

Setzt man hierin μ_{1b} und ν_{1b} ein, so findet man unter Benutzung der bekannten Abkürzungen

$$g'_m = r_m \frac{\cos \varepsilon' \cos (\varphi_m - \varepsilon'')}{\sin (\varphi_m - \varepsilon' - \varepsilon'')}, \tag{22 a}$$

$$g''_m = r_m \frac{\cos \varepsilon'' \cos (\varphi_m - \varepsilon')}{\sin (\varphi_m - \varepsilon' - \varepsilon'')}, \tag{22 b}$$

$$f_m = r_m \frac{\cos \varepsilon' \cos \varepsilon''}{\sin (\varphi_m - \varepsilon' - \varepsilon'')}. \tag{22 c}$$

die Beziehung

$$B_3 = - \frac{l'_m - g''_m}{f_m}. \quad (21 \text{ b})$$

In dieser Form ist aber B_3 als Lateralvergrößerung bekannt (vgl. z. B. Anm.²).

d) Öffnungsfehler

Für den Öffnungsfehler findet man unter Beachtung von Gl. (18) und (19):

$$\begin{aligned} B_{11} &= B_{11}^* + \mu_{1a} \frac{r_m}{2 R' \cos^3 \varepsilon'} \left(\frac{l'_m}{r_m} \right)^2 + \nu_{1a} \frac{r_m}{2 R' \cos^3 \varepsilon'} \left(\frac{l'_m}{r_m} \right)^2 \left(\frac{l''_m}{r_m} \right) + \frac{r_m}{2 R'' \cos^3 \varepsilon''} M_1^2 \frac{l''_m}{r_m} \\ &= B_{11}^* + \frac{r_m}{2 R' \cos^3 \varepsilon'} \left(\frac{l'_m}{r_m} \right)^2 \left(\mu_{1a} + \nu_{1a} \frac{l''_m}{r_m} \right) + \frac{r_m}{2 R'' \cos^3 \varepsilon''} M_1^2 \frac{l''_m}{r_m}. \end{aligned}$$

Nach der Abbildungsleichung und nach den Gln. (21 a, b) ist nun

$$\mu_{1a} + \nu_{1a} \frac{l''_m}{r_m} = - \left(\mu_{1b} + \nu_{1b} \frac{l''_m}{r_m} \right) \frac{l'_m}{r_m} = \frac{l'_m - g''_m}{f_m} \frac{l'_m}{r_m}$$

sowie

$$M_1 = - \frac{l'_m}{r_m} N_1 = \frac{l'_m}{r_m} \frac{l'_m - g'_m}{f_m}.$$

Damit wird

$$B_{11} = B_{11}^* + \frac{l_m'^3}{2 R' r_m^2 \cos^3 \varepsilon'} \left(\frac{l''_m - g''_m}{f_m} \right) + \frac{l_m''^3}{2 R'' r_m^2 \cos^3 \varepsilon''} \left(\frac{l'_m - g'_m}{f_m} \right)^2. \quad (23)$$

Der von dem einen von uns³ bereits früher abgeleitete und auf anderem Wege bestätigte⁴ Ausdruck für den Öffnungsfehler stimmt mit dem durch Gl. (23) gegebenen Ausdruck für B_{11} überein. Die die Krümmung der Polschuhe berücksichtigenden Glieder sind dieselben wie jene in den früheren Arbeiten^{3,4} abgeleiteten, während sich der Ausdruck B_{11}^* für den Öffnungsfehler bei gerader Polschuhbegrenzung durch Umformung auf die bekannte Form² bringen läßt. Dies ist von uns nachgeprüft worden. Der umfangreiche Beweis kann an dieser Stelle nicht wiedergegeben werden.

e) Die gemischt öffnungswinkel- und impulsabhängige und die rein impulsabhängige Aberration.

Unter Beachtung von

$$M_{12} = M_{12}^*, \quad N_{12} = N_{12}^* + \frac{r_m}{R'' \cos^3 \varepsilon''} M_1^* M_2^*,$$

$$M_{22} = M_{22}^*, \quad N_{22} = N_{22}^* + \frac{r_m}{2 R'' \cos^3 \varepsilon''} M_2^{*2},$$

was aus den Gln. (18) und (19) folgt, kann man die Ausdrücke für die gemischt öffnungswinkel- und impulsabhängige Aberration und für die rein impulsabhängige Aberration in der Form darstellen:

$$B_{12} = B_{12}^* + \frac{l'_m}{R'' \cos^3 \varepsilon''} M_1^* M_2^* \quad (24)$$

und

$$B_{22} = B_{22}^* + \frac{l'_m}{2 R'' \cos^3 \varepsilon''} M_2^{*2}. \quad (25)$$

Die allgemeinen Ausdrücke B_{12}^* und B_{22}^* sind von uns bereits früher angegeben worden¹, nachdem VOORHIES⁵ den Spezialfall $\varepsilon' = \varepsilon'' = 0$ untersucht hatte.

f) Eine andere Darstellung der Koeffizienten B

Unter Benutzung der Abkürzung

$$S_i = \mu_i + \frac{l'_m}{r_m} \nu_i \quad (26)$$

($i = 1a, 1b, 2a, 11a, 11b, 11c, 12a, 12b, 22a$)

² H. EWALD u. H. HINTENBERGER, Methoden und Anwendungen der Massenspektroskopie, Verlag Chemie, Weinheim 1953.

³ H. HINTENBERGER, Z. Naturforschg. **6a**, 275 [1951].

⁴ L. A. KÖNIG u. H. HINTENBERGER, Z. Naturforschg. **10a**, 877 [1955].

⁵ H. G. VOORHIES, Rev. Sci. Instrum. **26**, 716 [1955], **27**, 58 [1956].

lassen sich die Koeffizienten B besonders einfach darstellen. Man findet

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= S_{1a} + S_{1b} \frac{l'_m}{r_m}, & B_2 &= S_{2a}, & B_3 &= S_{1b}, \\ B_{11} &= S_{11a} + S_{11b} \frac{l'_m}{r_m} + S_{11c} \left(\frac{l'_m}{r_m} \right)^2, \\ B_{12} &= S_{12a} + S_{12b} \frac{l'_m}{r_m}, & B_{13} &= S_{11b} + 2 S_{11c} \frac{l'_m}{r_m}, \\ B_{22} &= S_{22a}, & B_{23} &= S_{12b}, & B_{33} &= S_{11c}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Hierin sind die μ, ν nach den Gln. (18) und (19) einzusetzen**.

g) Möglichkeiten zur Korrektur der Bildfehler

Wie man aus den ausführlich geschriebenen Gleichungen für die Bildfehler B_i ($i = 11, 12, 13, 22, 23, 33$) ersieht, kann man stets durch geeignete Wahl der Krümmung der Polschuhbegrenzung eines der B_i zum Verschwinden bringen. Für den Öffnungsfehler ist dies von dem einen von uns bereits früher gezeigt worden^{6, 7, 8}. Darüber hinaus kann man durch geeignete Wahl von $\varphi_m, \varepsilon', \varepsilon'', l'_m, R', R''$ auch mehrere Bildfehler gleichzeitig korrigieren. Hierüber soll in einer ausführlichen Arbeit später berichtet werden. Wir wollen uns an dieser Stelle darauf beschränken, ein Beispiel für die gleichzeitige Korrektur von B_{11}, B_{13} und B_{33} mitzuteilen:

** An der Gestalt der B_i nach den Gln. (27) sieht man, daß die Erweiterung der Gl. (1) auch in umgekehrter Schrittfolge hätte geschehen können: Man hätte zuerst die endliche Objektausdehnung und dann die Polschuhkrümmung berücksichtigen können.

Für $\varphi_m = 90^\circ, \varepsilon' = \varepsilon'' = 0, l'_m = l''_m = r_m, R' = R'' = r_m$ werden $B_2 = 2, B_3 = -1, B_{11} = B_{13} = B_{33} = 0, B_{12} = 4, B_{22} = -1, B_{23} = 2$.

5. Der Spezialfall gerader Polschuhbegrenzung

Durch Grenzübergang $R' \rightarrow \infty, R'' \rightarrow \infty$ folgen aus den B_i nach den Gln. (20) bzw. (27) die Koeffizienten B_i^* für den Fall geradlinig begrenzter Polschuhe. Die so entstehenden Koeffizienten B_{13}^*, B_{23}^* und B_{33}^* waren bisher nicht bekannt gewesen.

6. Hintereinanderschaltung von Zylinderkondensator und magnetischem Sektorfeld mit gekrümmten Feldgrenzen

In einer früheren Arbeit waren die Bildfehler von Massenspektrometern und Massenspektrographen, die aus hintereinandergeschaltetem Zylinderkondensator und magnetischem Sektorfeld mit geradliniger Begrenzung bestehen, berechnet worden⁹. Die dort angegebenen Formeln (15) gelten nun auch bei gekrümmter Feldbegrenzung, da bei der Berücksichtigung der Krümmung der Feldgrenze die M, N als Polynome in l'_m/r_m ihren Grad nicht ändern. Man hat nur in jene Formeln die μ, ν in ihrer verallgemeinerten Bedeutung einzusetzen.

⁶ H. HINTENBERGER, Z. Naturforschg. **3 a**, 125 [1948].

⁷ H. HINTENBERGER, Z. Naturforschg. **3 a**, 669 [1948].

⁸ H. HINTENBERGER, Rev. Sci. Instrum. **20**, 748 [1949].

⁹ H. HINTENBERGER u. L. A. KÖNIG, Z. Naturforschg. **12 a**, 140 [1957].